TEMA 8

CONTRASTES PARAMÉTRICOS

Nota: sobre un parámetro de una población dada

8.1. *CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS SOBRE LA MEDIA DE UNA POBLACIÓN N(μ,σ)*

- σ conocida vs. desconocida
  - o H_0: [$\mu=\mu_0$]≡hipótesis nula SIEMPRE simple
  - o H_1: [$\mu<>\mu_0$]≡hipótesis alternativa
- Se toma una muestra aleatoria simple, m.a.s. X

8.1.1. *VARIANZA POBLACIONAL CONOCIDA*

- N(θ,σ)

8.1.1.1. Hipótesis simples

  - o H_0: [$\mu=\mu_0$]
  - o H_1: [$\mu=\mu_1$]
- Mejor región crítica: La obtenida por Neyman-Pearson

  $(\mu_1-\mu_0)\,\bar{x} \geq k$

  Si $\mu_1>\mu_0$, $(\mu_1-\mu_0)>0$, $\bar{x} \geq k$

  Si $\mu_1<\mu_0$, $(\mu_1-\mu_0)<0$, $\bar{x} \leq k$
- Dado α, n

  $k=\mu_0 +/- z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$

  Rechazar si $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right| > z_\alpha$

8.1.1.2. Hipótesis alternativas compuestas "mayor que" o "menor que"

  - o H_0: [$\mu=\mu_0$]
  - o H_1: [$\mu>\mu_0$] ó [$\mu<\mu_0$]
- Mejor región crítica: La obtenida por Neyman-Pearson

  $(\mu_1-\mu_0)\,\bar{x} \geq k$

  Si $\mu_1>\mu_0$, $(\mu_1-\mu_0)>0$, $\bar{x} \geq k$

  Si $\mu_1<\mu_0$, $(\mu_1-\mu_0)<0$, $\bar{x} \leq k$

- Dado α, n

  k=μ_0+/-$z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$

  Rechazar si $\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right| > z_\alpha$

8.1.1.3. <u>Hipótesis alternativa compuesta "distinto que"</u>

- o H_0: [$\mu=\mu_0$]
- o H_1: [$\mu\neq\mu_0$]

- Mejor región crítica: La obtenida por Razón de Verosimilitud al no estar definido Neyman-Pearson

  D=$\frac{\theta^* - \theta_0}{\sqrt{V(\theta^*)}}$ →N(0,1) si θ^*_{mv}

- Dado α, n

  $k_1=\mu_0-z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$

  $k_2=\mu_0+z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}$

  Rechazar si $\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right| > z_{\alpha/2}$

- Ejemplo: El peso de los roscones de Reyes sigue una distribución N(θ,20). Si una familia compra 35 roscones, los pesa dando una media de 260 gramos, y se los come, se puede decir, con una confianza de 0.95, que:

  a. El peso medio es distinto de 250
  b. El peso medio es mayor de 250

  <u>Solución</u>:

  a. H_0: [$\mu=\mu_0$], H_1: [$\mu\neq\mu_0$]

     Como $\left| \frac{260-250}{\sqrt{\frac{20^2}{35}}} \right|$=2.96> $z_{0.025}$=1.645, SÍ rechazo H_0

  b. H_0: [$\mu=\mu_0$], H_1: [$\mu>\mu_0$]

     Como $\left| \frac{260-250}{\sqrt{\frac{20^2}{35}}} \right|$=2.96> $z_{0.05}$=1.96, SÍ rechazo H_0

8.1.2. *VARIANZA POBLACIONAL DESCONOCIDA*

- N(θ_1, θ_2)

8.1.2.1. Hipótesis simples

- o H_0: [$\mu=\mu_0$]
- o H_1: [$\mu=\mu_1$]

- Mejor región crítica: Razón de verosimilitud, estimando $\theta_2^*=s_1$

D=$\frac{\theta^* - \theta_0}{\sqrt{V(\theta^*)}}$ $\rightarrow t_{n-1}$ para $\sigma^*=s_1$

- Dado α, n

k=μ_0+/-$t_{n-1,\alpha}$ $s/\sqrt{n-1}$

Rechazar si $\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \right| > t_{n-1,\alpha}$

8.1.2.2. Hipótesis alternativas compuestas "mayor que" o "menor que"

- o H_0: [$\mu=\mu_0$]
- o H_1: [$\mu>\mu_0$] ó [$\mu<\mu_0$]

- Mejor región crítica: Razón de verosimilitud, estimando $\theta_2^*=s_1$

D=$\frac{\theta^* - \theta_0}{\sqrt{V(\theta^*)}}$ $\rightarrow t_{n-1}$ para $\sigma^*=s_1$

- Dado α, n

k=μ_0+/-$t_{n-1,\alpha}$ $s/\sqrt{n-1}$

Rechazar si $\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \right| > t_{n-1,\alpha}$

8.1.2.3. Hipótesis alternativa compuesta "distinto que"

- o H_0: [$\mu=\mu_0$]
- o H_1: [$\mu\neq\mu_0$]

- Mejor región crítica: Razón de verosimilitud, estimando $\theta_2^*=s_1$

D=$\frac{\theta^* - \theta_0}{\sqrt{V(\theta^*)}}$ $\rightarrow t_{n-1}$ para $\sigma^*=s_1$

- Dado α, n

$k_1=\mu_0-t_{n-1,\alpha/2}\, s/\sqrt{n-1}$

$k_2=\mu_0+t_{n-1,\alpha/2}\, s/\sqrt{n-1}$

Rechazar si $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}}\right| > t_{n-1,\alpha/2}$

- Ejemplo: La duración de bombillas se asume normal. Si la vida de 9 bombillas da como resultado una media de 1540 horas y la desviación típica es de 25.82, se puede decir al 95% que las bombillas duran de media:
  a. Distinto de 1553
  b. Menos de 1553

Solución:

a. H_0: $[\mu=\mu_0]$, H_1: $[\mu\neq\mu_0]$

Como $\left|\frac{1540-1553}{\sqrt{\frac{25.82^2}{9-1}}}\right|=1.4241 < t_{8,0.025}=2.3060$, NO rechazo H_0

b. H_0: $[\mu=\mu_0]$, H_1: $[\mu<\mu_0]$

Como $\left|\frac{1540-1553}{\sqrt{\frac{25.82^2}{9-1}}}\right|=1.4241 < t_{8,0.05}=1.8595$, NO rechazo H_0

8.2. *CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS SOBRE LA VARIANZA DE UNA POBLACIÓN N(μ,σ)*

- Tanto Neyman-Pearson como Razón de Verosimilitud llevan a χ^2
  a. Si la media poblacional es conocida, χ^2_n
  b. Si la media poblacional es desconocida, χ^2_{n-1}
- Regiones críticas
  a. H_0: $[\sigma=\sigma_0]$, H_1: $[\sigma=\sigma_1]$ y $\sigma_1>\sigma_0$

  $$\frac{ns^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha}$$

  b. H_0: $[\sigma=\sigma_0]$, H_1: $[\sigma=\sigma_1]$ y $\sigma_1<\sigma_0$

  $$\frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

  c. H_0: $[\sigma=\sigma_0]$, H_1: $[\sigma>\sigma_0]$

  $$\frac{ns^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha}$$

  d. H_0: $[\sigma=\sigma_0]$, H_1: $[\sigma<\sigma_0]$

  $$\frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

e. H_0: [$\sigma=\sigma_0$], H_1: [$\sigma\neq\sigma_0$]

$$\frac{n s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha/2} \text{ y } \frac{n s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

- Ejemplo:

  H_0: [σ=0.80], H_1: [$\sigma\neq$0.80]

  N=16, α=0.05, s=0.85

  i. $\frac{n s^2}{\sigma^2} = \frac{16 \quad 0.85^2}{0.80^2} = 18.0625$

  ii. $\chi^2_{16-1,1-0.05/2} = 6.262$
  $\chi^2_{16-1,0.05/2} = 27.488$

  iii. Como 18.0625 está dentro de los límites tolerables, NO rechazo H_0

8.3. *NO*

8.4. *NO*

8.5. *CONTRASTE ENTRE DOS POBLACIONES*

8.5.1. *CONTRASTE DE IGUALDAD DE MEDIAS*

- H_0: [$\mu_1=\mu_2$] ó [$\mu_1-\mu_2=0$]
- H_1: [$\mu_1\neq\mu_2$] ó [$\mu_1-\mu_2\neq0$]

8.5.1.1. Varianzas Poblacionales Conocidas

- $\xi_1 \rightarrow$ Normal(μ_1,σ_1) ➔m.a.s n_1➔ $\bar{x}$,s_1^2
- $\xi_2 \rightarrow$ Normal(μ_2,σ_2) ➔m.a.s n_2➔ $\bar{y}$,s_2^2
- $\bar{x} \rightarrow N(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$
- $\bar{y} \rightarrow N(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$
- $\bar{x} - \bar{y} \rightarrow N(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

- Razón de Verosimilitud
- Se rechaza H_0 si $\left| \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_0 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| > z_{\alpha/2}$

- Ejemplo: Una muestra de 200 bombillas de un lote dio una vida media de 2280 horas, y otra de 180 bombillas de un segundo lote una media de 2320 horas. Si la desviación típica poblacional es conocida e igual a 100, ¿se puede afirmar, para un nivel de confianza de 99%, que la vida media es distinta para cada lote?
  - $\left|\dfrac{(2280-2320)-(0)}{\sqrt{\dfrac{100^2}{200}+\dfrac{100^2}{180}}}\right| = 3.89$
  - $z_{0.005}$=2.5758
  - Como la diferencia en número de desviaciones típicas es significativa, SÍ rechazo H_0.

8.5.1.2. Varianzas Poblacionales Conocidas

- $\xi_1 \rightarrow$ Normal(μ_1,σ_1) ➔m.a.s n_1➔ $\overline{x}$,s_1^2
- $\xi_2 \rightarrow$ Normal(μ_2,σ_2) ➔m.a.s n_2➔ $\overline{y}$,s_2^2
- $\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \longrightarrow t_{n1+n2-2}$

- Razón de Verosimilitud
- Se rechaza H_0 si $\left|\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| > t_{n1+n2-2,\alpha/2}$
- Ejemplo: Una muestra de 200 bombillas de un lote dio una vida media de 2280 horas, y otra de 180 bombillas de un segundo lote una media de 2320 horas. Si las desviaciones típicas obtenidas son respectivamente 80 y 100, ¿se puede afirmar, para un nivel de confianza de 99%, que la vida media es distinta para cada lote?
  - $\left|\dfrac{(2280-2320)-0}{\sqrt{\dfrac{200*80^2+180*100^2}{200+180-2}}\sqrt{\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{180}}}\right| = 3.8831$
  - $t_{378,0.005}$=2.5758
  - Como la diferencia en número de desviaciones típicas es significativa, SÍ rechazo H_0.

8.6. *CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS EN GRANDES MUESTRAS*

8.6.1. *PLANTEAMIENTO GENERAL*

- Distribuciones no normales

- $\frac{\theta^* - \theta_0}{\sqrt{V(\theta^*)}}$ →N(0,1) si θ^*_{mv}

8.6.2. *PROPORCIONES*

- $\varepsilon \rightarrow B(1,\theta)$
- $\frac{p-\theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}}$ →N(0,1)
- H_0: [$\theta=\theta_0$], H_1: [$\theta\neq\theta_0$]
- Rechazar H_0 si $\left|\frac{p-\theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}}\right| > z_{\alpha/2}$
- Ejemplo: Se quiere comprobar si el porcentaje de personas que utilizan compañías de bajo coste es del 50%. Para ello se decide preguntar a 75 personas. Utilizando α=0.01:
  1. ¿Qué conclusión se ha de tomar si 40 contestan que sí lo utilizan?
     - $\left|\frac{\frac{40}{75}-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*(1-0.5)}{75}}}\right| = 0.577$
     - $z_{0.005}$=2.5758
     - Como la diferencia en número de desviaciones típicas no es significativa, NO rechazo H_0.
  2. ¿Cuántos han de contestar sí para que se acepte H_0?
     - $\left|\frac{x-0.5}{\sqrt{\frac{0.5*(1-0.5)}{75}}}\right| = 2.5758$

       $x = 0.5 \pm 2.5758\sqrt{\frac{0.5*(1-0.5)}{75}}$

       $0.3513 \leq x \leq 0.6487$

       $26.35 \leq SI \leq 48.65$
     - Entre 27 y 48 de los 75 han de contestar SÍ